Таким образом, плоскость качаний маятника поворачивается вокруг отвесной линии с угловой скоростью $\omega \sin(\varphi + \gamma)$, которая оказывается максимальной и равной $\omega$ при $\varphi = 90°$, т. е. на полюсах Земли, и обращается в нуль при $\varphi = 0°$, т. е. на экваторе. Описанное явление носит название *эффекта Фуко*. Как следует из рис. 34, плоскость качаний маятника поворачивается по часовой стрелке, т. е. против вращения Земли, с постоянной угловой скоростью $\omega \sin(\varphi + \gamma)$.*

## § 9. Движение точки под действием центральных сил

Пусть на материальную точку с массой $m$, положение которой относительно системы $Oxyz$ определяется заданием радиус-вектора $\mathbf{r}$, действует сила $\mathbf{F}$, коллинеарная вектору $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{F} = \lambda \mathbf{r},$$

где $\lambda = \lambda(x, y, z, t)$ — скалярная функция координат точки и времени.

Если к рассматриваемой материальной точке приложена только указанная сила, то согласно второму закону Ньютона уравнение ее движения имеет вид

$$m\mathbf{w} = m\ddot{\mathbf{r}} = \lambda \mathbf{r}. \tag{9.1}$$

Сила $\mathbf{F}$, линия действия которой всегда проходит через одну и ту же точку $O$, называется *центральной силой*. При $\lambda > 0$ масса $m$ отталкивается от неподвижного центра, а при $\lambda < 0$ притягивается к нему.

Для центральной силы, как было отмечено в § 2 данной главы, всегда существует интеграл моментов $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathrm{const} = \mathbf{C}$, из которого следует, что траекторией движения материальной точки под действием центральной силы является плоская кривая. При $\mathbf{C} = 0$ она вырождается в прямую, так как при этом вектор скорости $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ коллинеарен вектору $\mathbf{r}$.

Для простоты будем считать, что вектор $\mathbf{C}$ направлен по оси $Oz$. Интеграл моментов при этом записываем в виде

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = c\mathbf{k}, \quad \text{где} \quad c > 0. \tag{9.2}$$

**Интеграл площадей.** На плоскости $Oxy$, в которой происходит движение, удобно ввести полярную систему координат $r$, $\varphi$ (рис. 35). При этом уравнение (9.2) в проекции на ось $z$ принимает вид

$$r^2\dot{\varphi} = c = \mathrm{const}.$$

* Маятник Фуко демонстрирует неинерциальность системы отсчета, связанной с Землей, а точнее, вращение Земли. Опыт был проведен Жаном Бернаром Леоном Фуко в 1851 г. с маятником длиной 67 м.



Это соотношение называется *интегралом площадей*, так как производная по времени от площади $\sigma$ криволинейного сектора $OM_0M$ вычисляется по формуле

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2} r^2\dot{\varphi}. \tag{9.3}$$

Действительно, приращение $\Delta\sigma$ площади $\sigma$, соответствующее приращению $\Delta\varphi$ угла $\varphi$, с точностью до малых второго порядка

$$\Delta\sigma = \frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi,$$

откуда после деления на $\Delta t$ и перехода к пределу получаем выражение (9.3).

Если ввести в рассмотрение углы $\alpha$ и $\theta$ между вектором скорости $\mathbf{v}$ и ортами полярной системы координат $\mathbf{e}_r^0$ и $\mathbf{e}_\varphi^0$, как показано на рис. 35, то, учитывая, что $v \sin\alpha = v\cos\theta = r\dot{\varphi}$, $v = |\mathbf{v}|$, постоянную $c$ можно представить в виде

$$c = rv \sin\alpha = rv\cos\theta.$$

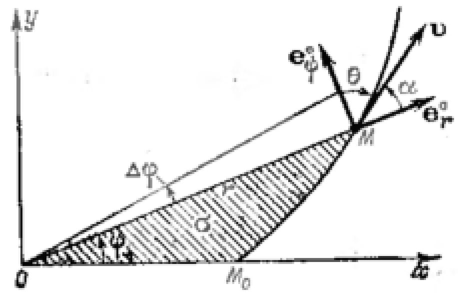

Рис. 35.

Таким образом, интеграл площадей, имеющий очень большое значение при изучении движения под действием центральной силы, может быть представлен в виде следующей цепочки равенств

$$r^2\dot{\varphi} = rv\sin\alpha = rv\cos\theta = 2\frac{d\sigma}{dt} = c. \tag{9.4}$$

**Формулы Бинэ.** Напомним выражения для компонент скорости и ускорения в полярной системе координат:

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}, \quad T_1 = \frac{v^2}{2} = \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}{2}, \tag{9.5}$$

$$w_r = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T_1}{\partial r} = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \tag{9.6}$$

$$w_\varphi = \frac{1}{r}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T_1}{\partial \varphi}\right) = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}). \tag{9.7}$$

Уравнение Ньютона (9.1) в проекциях на оси полярной системы координат принимает вид

$$mw_r = \lambda r, \tag{9.8}$$

$$mw_\varphi = 0. \tag{9.9}$$

Из равенства (9.9) с учетом соотношения (9.7) следует, что

$$r^2\dot{\varphi} = \mathrm{const} = c.$$

Интеграл площадей (9.4), таким образом, можно получить непосредственно из уравнений Лагранжа второго рода, не прибегая к теореме о моменте импульса.

Наличие интеграла площадей дает возможность заменить оператор дифференцирования по времени оператором дифференцирования по переменной $\varphi$:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{d}{d\varphi} = \frac{c}{r^2}\frac{d}{d\varphi}.$$

Обозначая $u = 1/r$, получаем

$$\frac{d}{dt} = cu^2\frac{d}{d\varphi}.$$

Это соотношение и интеграл площадей позволяют выражения (9.5)—(9.7) для компонент скорости и ускорения представить в виде

$$v_r = \dot r = \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = -c\frac{du}{d\varphi}, \tag{9.10}$$

$$v_\varphi = r\dot\varphi = cu, \tag{9.11}$$

$$w_r = \frac{dv_r}{dt} - u^{-1}c^2u^4 = cu^2\frac{d}{d\varphi}\left(-c\frac{du}{d\varphi}\right) - c^2u^3 = $$

$$= -c^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right), \tag{9.12}$$

$$w_\varphi = 0.$$

Из выражений (9.10)—(9.12) можно получить соотношения

$$v^2 = c^2\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right], \tag{9.13}$$

$$w_r = -c^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right), \tag{9.14}$$

называемые соответственно *первой* и *второй формулами Бинэ*.

Отметим особо, что формулы Бинэ, позволяющие определять скорость и ускорение в любой точке траектории из уравнения траектории в полярных координатах $r = r(\varphi)$, имеют место при движении материальной точки в любом центральном силовом поле, т. е. при любой функции $\lambda = \lambda(x, y, z, t)$.

**Интеграл энергии.** Признаком центральности силового поля является наличие интеграла площадей. Признаком же существования интеграла энергии является независимость работы от формы пути. Поэтому если поле центральное, то интеграл площадей существует всегда, а интеграл энергии только в некоторых случаях.

В важном частном случае, когда величина центральной силы зависит только от расстояния $r$, т. е. когда $\lambda = \lambda(r)$, элементарная работа может быть представлена в виде

$$\delta A = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = F_r(r)\,dr = \lambda(r)\,r\,dr = -d\Pi,$$

где
$$\Pi = -\int F_r\,dr = -\int \lambda(r)\,r\,dr. \tag{9.15}$$

Следовательно, при $\lambda = \lambda(r)$ интеграл энергии существует, причем потенциальная энергия может быть вычислена по формуле (9.15).

**Движение точки в центральном потенциальном поле.** Подставляя в интеграл энергии $mv^2/2 + \Pi(r) = E_0 = \text{const}$ выражение (9.13) для квадрата скорости, получаем

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2}{mc^2}\left[E_0 - \Pi(u) - \frac{mc^2u^2}{2}\right].$$

Переходя от $u$ к $r$, имеем

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2r^4}{mc^2}P(r), \tag{9.16}$$

где $P(r) = E_0 - \Pi(r) - mc^2/(2r^2)$.

Пусть в начальный момент $dr/d\varphi \neq 0$. Тогда функция $P(r)$ при $r = r_0$ положительна. Вследствие непрерывности данная функция положительна и в некоторой окрестности точки $r = r_0$. От размеров этой окрестности зависит характер траектории движения.

Выделим следующие четыре случая, в которых уравнение $P(r) = 0$:

1) имеет два разных положительных корня $r_1$ и $r_2$, таких, что $P(r) > 0$, $r_1 < r < r_2$;

2) имеет положительный корень $r_1 < r_0$, такой, что $P(r) > 0$, $r_1 < r < +\infty$;

3) имеет корень $r_2 > r_0$, такой, что $P(r) > 0$, $0 < r < r_2$;

4) не имеет положительных корней: $P(r) > 0$, $0 < r < +\infty$.

В первом случае движение происходит между двумя концентрическими окружностями с радиусами $r_1$ и $r_2$. Для простоты будем считать, что угол $\varphi$ отсчитывается от положения, в котором $r = r_1$, а $dr/d\varphi = 0$. При переходе из этой точки на окружность с бо́льшим радиусом $r = r_2$ величина $r$ возрастает с увеличением $\varphi$, и потому дифференциальное уравнение (9.16) на этом участке может быть представлено в виде

$$d\varphi = f(r)\,dr, \quad \text{где} \quad f(r) = \frac{c\sqrt{m}}{\sqrt{2}\,r^2\sqrt{P(r)}}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\varphi = I(r) = \int_{r_1}^{r} f(r)\,dr, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \Delta\varphi = I(r_2), \quad r_1 \leqslant r \leqslant r_2. \tag{9.17}$$

После касания окружности с бо́льшим радиусом величина $r$ с возрастанием $\varphi$ убывает, и, следовательно, $d\varphi = -f(r)\,dr$, а значит,

$$\varphi = \Delta\varphi - \int_{r_2}^{r} f(r)\,dr = \Delta\varphi - \int_{r_2}^{r_1} f(r)\,dr -$$

$$- \int_{r_1}^{r} f(r)\,dr = 2\Delta\varphi - I(r), \quad \Delta\varphi \leqslant \varphi \leqslant 2\Delta\varphi. \tag{9.18}$$

При дальнейшем увеличении угла $\varphi$, рассуждая, как и ранее, имеем

$$\varphi = 2\Delta\varphi + I(r), \quad 2\Delta\varphi \leqslant \varphi \leqslant 3\Delta\varphi,$$
$$\varphi = 4\Delta\varphi - I(r), \quad 3\Delta\varphi \leqslant \varphi \leqslant 4\Delta\varphi.$$

Сравнивая эти два равенства с соотношениями (9.17) и (9.18), видим, что функция $r = r(\varphi)$ периодическая, а угол $2\Delta\varphi$ является ее периодом. Построение функции $r = r(\varphi)$ сводится, таким образом, к вычислению интеграла (9.17).

Если угол $2\Delta\varphi$, соответствующий возвращению на окружность, с которой началось движение, может быть представлен в виде

$$2\Delta\varphi = 2\pi k/n,$$

где $k$ и $n$ — целые числа, то при $n$-м возвращении угол $\varphi$ изменится на $2\pi k$. Это означает, что точка возвратилась в исходное положение. Траектория движения является в этом случае замкнутой кривой. Как показали исследования интеграла (9.17), это возможно при произвольном $c$ только при $\Pi = -\mu/r$, $\Pi = kr^2/2$, где $\mu$ и $k$ — некоторые положительные постоянные.

Отметим одно важное свойство функции $r = r(\varphi)$. Если произвести замену $\varphi_1 = -\varphi$, т. е. изменить направление положительного отсчета угла $\varphi$, то исходное дифференциальное уравнение сохранит форму, так как $(dr/d\varphi)^2 = (dr/d\varphi_1)^2$. Остальные рассуждения при построении функции $r = r(\varphi_1)$ аналогичны приведенным, и поэтому $r(\varphi_1) = r(\varphi)$, т. е.

$$r(\varphi) = r(-\varphi). \tag{9.19}$$

Таким образом, функция $r = r(\varphi)$ является четной и, следовательно, легко продолжается в область отрицательных значений угла $\varphi$.

Рассмотрим теперь движение точки по построенной траектории. Начальными данными в рассматриваемой задаче являются величины $\varphi_0$, $\dot\varphi_0$, $r_0$, $\dot r_0$. Постоянные $E_0$ и $c$, которые определяют форму траектории, характеризуются значениями $\dot\varphi_0$, $r_0$, $\dot r_0$. Величина $\varphi_0$ зависит от выбора начала отсчета угла $\varphi$. Выбор этот является произвольным, поэтому числовое значение угла $\varphi_0$ не является существенным в данной задаче. Напомним, что



для удобства построения кривой $r = r(\varphi)$ было принято, что угол $\varphi$ отсчитывается от точки, в которой $r = r_1$, а $dr/d\varphi = 0$. Наличие интеграла площадей указывает на то, что величина $\dot\varphi$ при движении имеет тот же знак, что и $\dot\varphi_0$. Будем считать, что выбранное направление отсчета угла $\varphi$ таково, что при движении угол $\varphi$ возрастает. При таком подходе начальная точка на кривой $r = r(\varphi)$ определяется значением $r_0$ и знаком $\dot r_0$.

Отметим точки пересечения кривой $r = r(\varphi)$ с окружностью $r = r_0$. В одних из них $\dot r > 0$, а в других — $\dot r < 0$. Любая из данных точек, знак $\dot r$ которой совпадает со знаком $\dot r_0$, может быть принята за начальную точку траектории. Для определенности при $\dot r_0 > 0$ начальной считаем точку, которая соответствует наименьшему значению угла $\varphi_0$. Обозначим этот угол через $\varphi_0^*$.

Так как $r(\varphi) = r(-\varphi)$, то $\dot r(\varphi) = -\dot r(-\varphi)$. Поэтому при $\dot r_0 < 0$ начальной можно считать точку, соответствующую углу $\varphi = -\varphi_0^*$.

Рассмотрим второй случай, когда $P(r_1) = 0$, $r_1 < r_0$, $P(r) > 0$, $r_1 < r < +\infty$.

Кривая $r = r(\varphi)$, построенная по формулам (9.17) и (9.19), имеет в данном случае только две точки пересечения с окружностью $r = r_0$ при $\varphi = \varphi_0^*$ и $\varphi = -\varphi_0^*$ соответственно. Если $\dot r_0 > 0$, то точка монотонно удаляется в бесконечность. В случае $\dot r_0 < 0$ при выходе из точки $(r_0, -\varphi_0^*)$ величина $r$ сначала убывает с возрастанием $\varphi$, затем точка касается окружности $r = r_1$ и далее монотонно удаляется в бесконечность.

В третьем случае, когда $P(r_2) = 0$, $r_0 < r_2$, $P(r) > 0$, $0 < r < r_2$, начало отсчета угла $\varphi$ целесообразно связать с точкой, в которой $r = r_2$, а $dr/d\varphi = 0$. Кривая $r = r(\varphi)$ при этом задается соотношениями

$$\varphi = \int_{r}^{r_2} f(r)\,dr, \quad \varphi \geqslant 0, \quad r \leqslant r_2,$$
$$r(\varphi) = r(-\varphi), \quad \varphi \leqslant 0.$$

При $\dot r_0 > 0$ точка в процессе движения касается окружности $r = r_2$, а затем начинает монотонно приближаться к центру. При $\dot r_0 < 0$ приближение начинается сразу. В полях, на которые при некоторых начальных данных распространяется третий случай, возможно падение точки на центр.

Четвертый случай, когда уравнение $P(r) = 0$ не имеет положительных корней, не является характерным, и поэтому на нем останавливаться не будем.

**Движение точки под действием силы, пропорциональной расстоянию.** Простейшим примером центрального потенциального поля является поле, в котором сила задается в виде $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$,